Title	Retarded functional differential equations with general delay structure(Abstract_要旨)
Author(s)	Nishiguchi, Junya
Citation	Kyoto University (京都大学)
Issue Date	2017-03-23
URL	https://doi.org/10.14989/doctor.k20156
Right	許諾条件により本文は2018-03-22に公開
Type	Thesis or Dissertation
Textversion	ETD

学 位 審 査 報 告 書

（ふりがな） 氏　　　名	にしぐち　じゅんや 西口　純矢
学位（専攻分野）	博　士　（　理　学　）
学 位 記 番 号	理　博　　第　　　　　号
学位授与の日付	平成　　年　　月　　日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当
研 究 科・専 攻	理学研究科　数学・数理解析　専攻

（学位論文題目）

Retarded functional differential equations with general delay structure

（一般の遅れ構造をもつ遅れ型関数微分方程式）

論文調査委員	（主査）　國府　寛司　教　授 堤　誉志雄　教　授 上田　哲生　教　授

理　学　研　究　科

（ 続紙 1 ）

京都大学	博士（理　学）	氏名	西口　純矢
論文題目	Retarded functional differential equations with general delay structure		

（論文内容の要旨）

１つの独立変数 $t \in \mathbb{R}$ をもつ従属変数 $x \in \mathbb{E}$ に関する微分方程式は，未知関数 $x = x(\cdot)$ の t における微分が t 以前の過去の情報に依存するとき遅延微分方程式 (DDE) とよばれる．ここで，$\mathbb{E} = (\mathbb{E}, \|\cdot\|)$ は Banach 空間である．DDE は，数理物理，数理生態学，工学，生命科学などさまざまな分野で現れる．

常微分方程式 (ODE) とは異なり，DDE が生成する力学系は従属変数 x の空間上ではなく未知関数 $x(\cdot)$ の履歴のなす空間上で定式化される．これを DDE のダイナミクスの遅れ構造とよぶ．Hale (1963) は，有限遅れの遅れ型関数微分方程式 (RFDE) を導入することで，DDE のダイナミクスの観点をもたらした．与えられた有限遅れの DDE に対して，対応する右辺 F と一様位相を与えた連続な初期履歴の空間を選ぶことで有限遅れの RFDE を得られる．有限遅れ $r > 0$ をもつ RFDE は，未知関数 $x(\cdot)$ の微分 $\dot{x}(t)$ が t における長さ r の履歴 $x_t \colon [-r, 0] \ni \theta \mapsto x(t+\theta)$ にどのように依存するかを表す．

本論文は，有限遅れと無限遅れを含んださまざまな遅れのタイプを伴う DDE を統一的に扱い，それらのダイナミクスにおける遅れの構造を明らかにすることを目的とし，履歴区間 I，初期値空間 X，履歴汎関数 F で構成される一般の遅れ構造をもつ RFDE を導入する．区間 I は，ある $r > 0$ に対する有界区間 $[-r, 0]$ か半無限区間 $\mathbb{R}_- := (-\infty, 0]$ である．必ずしも連続とは限らない I から Banach 空間 $\mathbb{E}$ への写像全体のなす線型空間 $\mathrm{Map}(I, \mathbb{E})$ を考える．$\mathrm{Map}(I, \mathbb{E})$ の零元 0 は値が恒等的に $0 \in \mathbb{E}$ であるような定数写像である．X は $\mathrm{Map}(I, \mathbb{E})$ の線型部分空間とする．写像 $F \colon D \subset \mathbb{R} \times X \to \mathbb{E}$ に対して，初期値問題 (IVP)

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t), \qquad t \ge t_0, \quad x_{t_0} = \phi_0, \quad (t_0, \phi_0) \in D.$$

を考える．X の自然な位相的性質を導入し，これを満たすとき X は延長可能であるとよぶ．また，延長に関して Lipschitz とよぶ履歴汎関数 F に関する条件を定義する．「延長」における F の値の差のみを比較するので，この Lipschitz 条件は X の計量構造に依存しない．したがって，有限遅れの RFDE において，延長に関して Lipschitz の概念は通常の Lipschitz 条件よりも弱いものである．

この論文における主定理の１つは以下である：一般の遅れ構造をもつ RFDE に対応する IVP が，開集合 D 上で連続でかつ延長に関して一様に Lipschitz であるような任意の F に対して適切であるための必要十分条件は，$\dot{x} = 0$ が生成する X

上の解半群 $(S_0(t))_{t\geq 0}$ が連続であること，すなわち，半流れ

$$[0,+\infty)\times X \ni (t,\phi)\mapsto S_0(t)\phi \in X$$

が連続であることである．ここで，RFDE の IVP が適切であるとは，この RFDE により生成される解プロセス U_F が連続であることを意味する．U_F は，初期条件 $x_{t_0}=\phi_0$ に対する IVP の一意解 $x(t,t_0,\phi_0)$ を用いて

$$U_F(\tau,t_0,\phi_0)=x(\cdot,t_0,\phi_0)_{t_0+\tau},\quad \tau\geq 0$$

と定義される．連続プロセスの概念は非自励系力学系の定式化に用いられ，Dafermos (1971) により導入された．

以上が本論文の主要結果である．

（論文審査の結果の要旨）

本論文は有限遅れや無限遅れを含むさまざまな遅れのタイプを伴う遅延微分方程式 (DDE) を統一的に扱うために，一般の遅れ構造の概念を導入し，そのような DDE の初期値問題について，これまでの研究を包括する広い観点から研究を行った．

遅れ構造により，方程式が時間変数のみをもつにもかかわらず，DDE の生成する力学系は無限次元となる．この無限次元性により，DDE のダイナミクスは ODE のダイナミクスよりも「豊か」となる．たとえば，スカラーの１階の方程式に対しても解の振動現象が生じうる．DDE の初期値問題の適切性，すなわち解の存在と一意性，および解の初期値に関する連続性は，特に無限遅れの場合にそのような定式化を行うかについて完全に明らかになっていなかった．

申請者はこの問題に対し，一般の遅れ構造の概念を導入して，初期値空間とその位相，および履歴汎関数を，延長可能性と延長に関する Lipschitz 条件という形で明確に関係づけ，それによって，対応する初期値問題が適切となるための必要十分条件を与えることができた．

この必要十分条件は，Hale & Kato (1978) により得られた以前の結果を含み，またそこで導入された条件の意味を明確にするものである．Hale & Kato においては X がセミノルム空間であることが仮定されていたが，この結果はそれ以外の位相に対しても適用可能である．そのような位相の１つの例は連続写像の空間 $C(\mathbb{R}_{-}, \mathbb{E})$ におけるコンパクト開位相であり，これは時間と状態に依存する非有界な遅れをもつ微分方程式に対して考えられる．

主結果の１つの応用として，Hale & Kato により得られた既存の結果が $\mathbb{E}$ が無限次元である場合にも成り立つことや，また，未知関数の過去の値に依存する遅れをもつ微分方程式の IVP が適切であることを遅れが非有界な場合も含めて示された．これは Rezounenko (2009) により得られた結果の拡張と考えられるものである．

申請者の結果は一般の DDE のダイナミクスを考える上で基本的な枠組みを与えるものとして，この分野における重要な貢献であるといえる．実際に，申請者はこの研究を基に，DDE の大域アトラクタの存在などの問題に取り組み始めており，今後の研究の進展が大いに期待される．

以上により, 本論文は博士 (理学) の学位論文として価値あるものと認める．また, 論文内容とそれに関連した事項について平成 29 年 1 月 25 日に試問を行った結果, 合格と認めた.

要旨公開可能日：　　　　年　　　月